數學傳播 48卷2期, pp. 95-102

從一道學測試題到印度理工學院的入學考題

連威翔 · 周伯欣

一、前言

某次, 在大學入學考試中心官方網站 [1] 所提供的歷屆學測試題當中, 筆者(指第一作者連威翔, 下同) 發現83年學測數學考科試題的填充第 10 題如下:

填充題 10: 已知 p 爲常數, 若 x^3+px+6 與 x^2+px+6 的最低公倍式爲 4 次式, 則 $p=$ ______。

算算日子, 上述問題問世至今已超過27年。

筆者將上述考題傳給透過通訊軟體認識的朋友周伯欣老師之後, 不久即收到他回傳的解答, 並約定若筆者找出解答也要告訴他。而經過研究之後, 筆者找出了上述問題的另解, 並將該另解傳給周老師參考。

大概是所謂的有來有往, 不久後周老師傳來了一個網頁連結, 所連結到的網頁介紹了他對一道印度理工學院入學考題寫下的解答, 請參考周老師所主持的《宇宙數學教室》部落格上的 [2] 文。該考題以英文命題, 問題的敘述如下:

Question 13: Let a, b, c be three non-zero real numbers such that the equation

$$\sqrt{3}a\cos x+2b\sin x=c,\qquad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],$$

has two distinct real roots α,β with $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$. Then the value of $\frac{b}{a}$ is?

有趣的是, 筆者研究過後也找出了有別於 [2] 文解法的另解, 隨後也將其傳給周老師參考。

經過了與周老師對上述兩道入學考題所做的討論後, 筆者覺得其中的互動過程蠻有意思的。因此在底下第二節中, 筆者將依序介紹周老師與筆者自己對上述填充題 10 的解法; 接著的第三節中, 筆者則將介紹上述 Question 13 的另解, 以求與 [2] 文的解法做對照。希望透過本文對上述兩道考題呈現不同解法的過程, 分享朋友間討論數學的樂趣。

二、填充題10的解答

周老師的解法:

對於第一節中的填充題 10, 周伯欣老師在接收到筆者所傳的訊息得知該問題後, 沒多久就回傳了一個解法。在徵得他同意後, 底下介紹由周老師提供的解法, 其基本思路就是直接的「待定係數法」:

解答: 假設

$$f(x)=x^3+px+6,$$
$$g(x)=x^2+px+6,$$

並記 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式爲 $H(x)$。不妨令 $H(x)$ 的首項係數爲 1, 因爲 $H(x)$ 的次數爲 4, 而 $f(x)$ 的次數爲 3, 所以存在 1 次式 $x+a$ 使得

$$H(x)=(x+a)f(x)=(x+a)(x^3+px+6). \tag{1}$$

上式展開可得 $H(x)$ 的領導項爲 x^4, 常數項爲 $6a$。因此對於 $H(x)$ 與 $g(x)$, 存在常數 b 使得

$$H(x)=(x^2+bx+a)g(x)=(x^2+bx+a)(x^2+px+6). \tag{2}$$

將上述兩個 $H(x)$ 的表達式展開, 得

$$x^4+ax^3+px^2+(ap+6)x+6a=x^4+(p+b)x^3+(a+bp+6)x^2+(ap+6b)x+6a.$$

比較上式中 1 次、2 次與 3 次項係數後, 可得

$$\begin{cases} a=p+b \\ p=a+bp+6 \\ ap+6=ap+6b \end{cases}.$$

由上述方程組的第三式可知 $b=1$, 將 $b=1$ 代入第二式可得 $a=-6$, 最後再由第一式知

$$p=a-b=-7.$$

故解得 $p=-7$, 原問題解題完畢。

以上就是周老師的解法。而如果想進一步知道關於原問題之兩多項式的資訊, 順便驗證 $p=-7$ 是否正確, 我們可將上面解得的 a,b,p 之值代入 (1), (2) 兩式, 得到

$$H(x)=(x-6)(x^3-7x+6),\quad H(x)=(x^2+x-6)(x^2-7x+6).$$

對上兩式進行因式分解, 寫成

$$H(x)=(x-6)[(x-1)(x-2)(x+3)], \quad H(x)=(x-2)(x+3)[(x-1)(x-6)].$$

注意在上兩式的中括號內之兩多項式爲原問題兩多項式取 $p=-7$ 後作因式分解的結果, 而上兩式顯示此時 4 次式 $H(x)$ 確實爲原問題兩多項式之最低公倍式。

筆者的解法:

看完周老師的解法後, 筆者也想出了自己的解法。在筆者介紹自己的解法之前, 我們先看一些關於多項式公倍式的基本知識。

假設 $f(x), g(x)$ 是兩個次數分別爲 m, n 的非零多項式, 其中 m, n 爲非負整數, 則 $f(x), g(x)$ 兩多項式的乘積 $f(x)g(x)$ 同時是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的倍式, 這是因爲有

$$\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=g(x),$$
$$\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=f(x).$$

不過我們可以問, 在 $f(x), g(x)$ 的所有公倍式當中, $f(x)g(x)$ 一定是其中次數最低的嗎? 其實並不一定, 例如我們取

$$f(x)=(x-1)(x-2), \tag{3}$$
$$g(x)=(x-2)(x-3), \tag{4}$$

則 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 也是 $f(x), g(x)$ 的公倍式, 且其次數小於乘積多項式 $f(x)g(x)$ 的次數 4。若細究其所以然, 不難看出是因爲 (3), (4) 兩式中的 $f(x)$ 與 $g(x)$ 具有 $x-2$ 這個公因式。

有了對上述基礎知識的認知後, 對於第一節中的填充題 10, 筆者介紹自己的解法如下:

解答: 假設

$$f(x)=x^3+px+6,$$
$$g(x)=x^2+px+6,$$

則 $f(x)g(x)$ 的次數爲 5 且它是 $f(x), g(x)$ 的公倍式。不過, 因爲原問題中提到 $f(x), g(x)$ 之最低公倍式的次數爲 4, 所以 $f(x)g(x)$ 並非 $f(x), g(x)$ 的最低公倍式。

此時, 我們假設 $f(x), g(x)$ 有公因式 $h(x)$, 則存在多項式 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 滿足

$$f(x)=x^3+px+6=h(x)f_1(x), \tag{5}$$

$$g(x)=x^2+px+6=h(x)g_1(x). \tag{6}$$

由上兩式可看出 $h(x)$ 爲非零多項式, 此時 $\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}$ 爲 $f(x),g(x)$ 的公倍式, 這是因爲

$$\frac{f(x)g(x)}{h(x)}=\frac{h(x)f_1(x)\cdot h(x)g_1(x)}{h(x)}=h(x)f_1(x)g_1(x), \tag{7}$$

且由 (5), (6) 兩式可知 (7) 式最後的 $h(x)f_1(x)g_1(x)$ 同時爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的倍式。

若 (7) 式計算所得之多項式 $h(x)f_1(x)g_1(x)$ 爲 4 次式, 則該多項式就是 $f(x),g(x)$ 的一個最低公倍式, 此時我們令 $h(x)$ 的次數爲 k, 則由 (5), (6) 兩式可知多項式 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 的次數分別爲 $3-k$ 與 $2-k$, 因此 (7) 式最後的多項式 $h(x)f_1(x)g_1(x)$ 其次數滿足

$$k+(3-k)+(2-k)=4.$$

由上式可解得 $k=1$, 因此 $h(x)$ 的次數爲 1, 故可假設 $h(x)=x-a$, 其中 a 爲常數。此時計算 (5)−(6), 可得

$$f(x)-g(x)=h(x)[f_1(x)-g_1(x)]=(x-a)[f_1(x)-g_1(x)], \tag{8}$$

上式顯示 $h(x)$ 即 $x-a$ 是 $f(x)-g(x)$ 的因式。另一方面, 注意有

$$f(x)-g(x)=(x^3+px+6)-(x^2+px+6)=x^2(x-1),$$

由上式可知在 $f(x)-g(x)$ 的所有因式當中, 形如 $x-a$ 的一次因式恰有 x 與 $x-1$ 兩個 (其中 $x=x-0$), 因此知 $h(x)=x$ 或 $h(x)=x-1$。此時, 我們先透過 (5), (6) 兩式確認 $f_1(x),g_1(x)$ 皆爲非零多項式, 再對 $h(x)$ 的兩種可能分別討論如下:

(a) 若 $h(x)=x$, 則由 (5), (6) 兩式可知

$$x^3+px+6=xf_1(x),$$
$$x^2+px+6=xg_1(x).$$

不難看出上兩式均不可能成立, 這是因爲上兩式的等號右邊都沒有常數項, 但是其等號左邊卻都有常數項 6, 因此一開始的假設 $h(x)=x$ 不成立。

(b) 若 $h(x)=x-1$, 則由 (5), (6) 兩式可知

$$x^3+px+6=(x-1)f_1(x), \tag{9}$$
$$x^2+px+6=(x-1)g_1(x). \tag{10}$$

在 (9), (10) 兩式中代入 $x=1$, 均可得 $p+7=0$, 因此 $p=-7$, 所以有

$$f(x)=x^3-7x+6=(x-1)f_1(x),$$

$$g(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-1)g_1(x).$$

利用多項式的除法計算 $(x^3 - 7x + 6) \div (x-1)$ 與 $(x^2 - 7x + 6) \div (x-1)$, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3), \\ g(x) &= x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6). \end{aligned}$$

利用上兩式及 $h(x) = x - 1$ 的條件計算 (7) 式最後的 $h(x)f_1(x)g_1(x)$, 結果如下:

$$\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = (x-1)(x-2)(x+3)(x-6).$$

由於上式最後的多項式爲 4 次式且同時爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的倍式, 因此它就是原問題所提到之次數爲 4 的最低公倍式, 從而 $h(x) = x - 1$ 符合所求, 此時有 $p = -7$ 的條件。

將以上 (a), (b) 兩部分的討論結果合起來看, 可知原問題的解答爲 $p = -7$, 解題完畢。

上述解答還可改寫成另一種版本。當我們在 (8) 式上方確定 $f(x), g(x)$ 的公因式 $h(x)$ 的次數爲 1 並假設 $h(x) = x - a$ 之後, 可將其代入(5), (6) 兩式, 得到

$$\begin{aligned} x^3 + px + 6 &= (x-a)f_1(x), \\ x^2 + px + 6 &= (x-a)g_1(x), \end{aligned}$$

將 $x = a$ 代入上述兩式, 可得

$$a^3 + pa + 6 = 0, \tag{11}$$

$$a^2 + pa + 6 = 0. \tag{12}$$

若將 $a = 0$ 代入 (11), (12) 兩式中的任一式, 均可得到 $6 = 0$ 這個不成立的式子, 因此知 $a \neq 0$。此時計算 (11)−(12) 可得 $a^3 - a^2 = 0$, 或者寫成

$$a^2(a-1) = 0,$$

因爲已確定 $a \neq 0$, 故由上式可解得 $a = 1$。將 $a = 1$ 代入 (11) 式或 (12) 式後, 即可再次得到 $p = -7$ 的答案, 同時也確定了 $x - 1$ 爲 $f(x), g(x)$ 的公因式。

本節最後, 回顧上述內容對填充題 10 提出的兩種解法, 可發現周老師的解法較筆者的解法簡潔許多, 其中最大的關鍵應是前者採取了直指問題核心的「待定係數法」進行求解。因此, 日後讀者在求解相關問題時, 不妨多多考慮使用「待定係數法」。

三、印度入學考題的解答

在本節內容中, 筆者將會針對第一節所介紹的 Question 13 介紹一個有別於 [2] 文解法的另解。當初筆者向周老師進一步詢問後, 得知 Question 13 可在網頁 [3] 中的試卷內找到。注意該試卷的前兩部份分別是物理與化學問題, 位在最底下的第三部分才是數學題 (註1)。

在 [2] 文中周伯欣老師介紹 Question 13 的解答之前, 他先將題目翻譯成中文, 此處引述翻譯後的結果如下:

Question 13: 設 a, b, c 皆爲非零實數, 已知 x 的方程式

$$\sqrt{3}a\cos x + 2b\sin x = c \tag{13}$$

在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的範圍中有相異兩解 α, β, 且 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{b}{a}$ 之值。

注意 [2] 文主要是使用三角函數疊合的手法來求解 Question 13, 解題過程的各個步驟清楚而明白。筆者對上述問題進行研究之後, 幸運地發現使用三角函數的和差角公式可得到一個有趣的另解, 筆者的另解如下:

解答: 因 α, β 相異, 不失一般性可假設 $\alpha > \beta$, 則依題意可寫下

$$-\frac{\pi}{2} \le \beta < \alpha \le \frac{\pi}{2},$$

且由上式可知

$$\alpha - \beta \le \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi. \tag{14}$$

我們知道在三角學理論中有底下的和差角公式:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B, \qquad \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B,$$

且藉由上述四式可計算得底下兩公式:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B,$$
$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$$

利用上述兩公式, 我們可寫下與原問題之 α, β 兩數有關的兩式如下:

$$\begin{aligned}\cos\alpha - \cos\beta &= \cos\Big(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\Big) - \cos\Big(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\Big)\\ &= -2\sin\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{16}$$

此時依據題目中 α,β 是方程式 (13) 之兩根的條件, 我們可寫下

$$\sqrt{3}a\cos\alpha+2b\sin\alpha=c, \tag{17}$$
$$\sqrt{3}a\cos\beta+2b\sin\beta=c. \tag{18}$$

計算 (17)$-$(18), 可得

$$\sqrt{3}a(\cos\alpha-\cos\beta)+2b(\sin\alpha-\sin\beta)=0,$$

先將上式反過來寫, 再將 (15), (16) 兩式與原問題中 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 的條件依序代入, 完成底下的推導:

$$0=\sqrt{3}a\Big(-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Big)+2b\Big(2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Big)$$
$$=\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Big(-2\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{6}+4b\cos\frac{\pi}{6}\Big)$$
$$=\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)(-\sqrt{3}a+2\sqrt{3}b).$$

觀察上式的頭尾, 可推得

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0 \quad 或 \quad -\sqrt{3}a+2\sqrt{3}b=0,$$

若 $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$, 則 $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=k\pi$, 其中 k 爲整數, 又因爲 $\alpha>\beta$, 故 k 爲正整數, 因此我們有

$$\alpha-\beta=2k\pi\geq 2\pi.$$

注意上式與 (14) 式矛盾, 因此可確定 $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$ 必不成立, 所以我們有

$$-\sqrt{3}a+2\sqrt{3}b=0.$$

上式可化簡爲 $a=2b$, 因此可得

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{2},$$

此與 [2] 文所求得的解答相同, 至此解題完畢。

四、結語

印象中, 筆者當年就讀高中時, 數學課本內有介紹最高公因式與最低公倍式的相關知識。雖然說在最新頒布的十二年國民基本教育課程課綱要的數學領域課程手冊 [4] 中, 我們已經找不到最高公因式或最低公倍式的課程介紹了, 但仍希望透過分享本文介紹的第一個問題及其兩種解法(尤其是周老師的解法), 來傳播相關的知識給較年輕的讀者們。

與第一個問題相反, 本文介紹的第二個問題, 無論是在筆者解法中所使用的和差角公式或是 [2] 文解法中周老師所使用的三角函數疊合公式, 我們都可以在 [4] 課程手冊 11 年級的課程介紹中找到。因此某種程度上, 本文或許呈現了國內數學課綱在這幾十年演變過程中的冰山一角。從筆者就讀高中到現在已屆不惑之年(但似乎仍有不少疑惑) 的研究與學習歷程, 雖然歷經課綱不斷演變的過程, 但不變的是喜愛研究與解題的心, 相信周老師也有相同的感受。

註 1: 根據周老師所說, 印度理工學院每年的招生題目都會有幾個版本, 內容都相同, 僅是題目與科目排列順序有異, 如此設計的主要目的是爲了防弊。而在 [3] 中的那份試卷只是其中一個版本, 另外一個版本可能數學試題會在最上方。

參考文獻

1. 學科能力測驗歷年試題。大學入學考試中心官方網站。https://www.ceec.edu.tw .
2. 周伯欣。Question 13, 印度理工學院聯合入學考試 (IIT JEE), 2018, Advanced, Paper 1, 三角函數疊合。宇宙數學教室部落格, 2020年12月。
3. Past Question Papers, JEE (Advanced) official website. https://jeeadv.ac.in/archive.html .
4. 十二年國民基本教育課程綱要–國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程手冊。國家教育研究院。2020年2月。

—本文作者連威翔投稿時任職山城人力資源管理顧問有限公司 (派遣至苗栗縣政府環境保護局), 周伯欣投稿時任教台北市私立鵬展文理補習班, 並主持「宇宙數學教室」部落格—